

## โครงการประเมินและพัฒนาศักยภาพเป็นเลิศทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ (TEDET) ประจำปี 2567

### เฉลยแบบทดสอบ ประจำปี 2567

#### วิชาคณิตศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 3

ข้อ	คำตอบ	ข้อ	คำตอบ
1	354	16	154
2	21	17	120
3	40	18	2
4	15	19	296
5	4	20	14
6	10	21	60
7	104	22	6
8	7	23	392
9	4	24	39
10	15	25	8
11	2	26	18
12	36	27	5
13	600	28	45
14	4	29	100
15	27	30	10





**คำอธิบาย**

1. เนื่องจากอัตราส่วนของไฟฟ้าที่เกิดจากการเผาขยะ  
ต่อไฟฟ้าที่เกิดจากไฟไหม้สิ่งปลูกสร้างเป็น 2 : 1  
จะได้ว่า ไฟฟ้าที่เกิดจากการเผาขยะเป็น

$$4.8 \times 2 = 9.6\%$$

นั่นคือ ไฟฟ้าที่เกิดจากนักเดินป่าเป็น

$$100 - (14.3 + 4.8 + 4 + 9.6 + 8.3)$$

$$= 100 - 41$$

$$= 59\%$$

ดังนั้น มีไฟฟ้าที่เกิดจากนักเดินป่าจำนวน

$$600 \times \frac{59}{100} = 354 \text{ ครั้ง}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 3^{13} \odot 3^{22} &= \frac{(3^{13})^2 - 3^{22}}{240} \\ &= \frac{3^{26} - 3^{22}}{240} \\ &= \frac{3^{22}(3^4 - 1)}{240} \\ &= \frac{3^{22} \times 80}{3 \times 80} \\ &= 3^{21} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $n = 21$

3. เนื่องจาก  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$  (มุม มุม มุม)

$$\text{จะได้ว่า } (AB - 1) : AB = 4.5 : 6$$

$$\text{นั่นคือ } 4.5AB = 6AB - 6 \quad \therefore AB = 4 \text{ เซนติเมตร}$$

ดังนั้น ความสูงจริงของตึกคือ

$$4 \times 1,000 = 4,000 \text{ เซนติเมตร} = 40 \text{ เมตร}$$

$$4. \quad \text{เนื่องจาก } 6x - \frac{4}{3}(x + a) = -8$$

$$18x - 4(x + a) = -24$$

$$14x - 4a = -24$$

$$7x - 2a = -12$$

$$x = \frac{2a - 12}{7}$$

เนื่องจาก  $a$  เป็นจำนวนนับ และค่าของ

$$\frac{2a - 12}{7} \text{ เป็นจำนวนลบ จะได้ว่า}$$

$$\text{ถ้า } a = 1 \text{ จะได้ } x = -\frac{10}{7}$$

$$\text{ถ้า } a = 2 \text{ จะได้ } x = -\frac{8}{7}$$

$$\text{ถ้า } a = 3 \text{ จะได้ } x = -\frac{6}{7}$$

$$\text{ถ้า } a = 4 \text{ จะได้ } x = -\frac{4}{7}$$

$$\text{ถ้า } a = 5 \text{ จะได้ } x = -\frac{2}{7}$$

$$\text{ถ้า } a = 6 \text{ จะได้ } x = 0 \text{ ซึ่งไม่ตรงกับเงื่อนไข}$$

จะได้ว่า ค่าของจำนวนนับ  $a$  ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

คือ 1, 2, 3, 4, 5

ดังนั้น ผลบวกค่าของจำนวนนับ  $a$  ทั้งหมด

$$\text{เท่ากับ } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$5. \quad \textcircled{1} \quad y = \pi \times (2x^2)^2 = 4\pi x^4$$

$$\textcircled{2} \quad y = (3x)^3 = 27x^3$$

$$\textcircled{3} \quad y = (5 \times 5 \times 2) + (5 \times 4 \times x) = 50 + 20x$$

$$\textcircled{4} \quad y = \sqrt{(3x^2)^2 + (4x^2)^2} = \sqrt{25x^4} = 5x^2$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{1}{2} \times 2 \times (4x + 6x) = 10x$$

ดังนั้น พหุนามดีกรีสองปรากฏอยู่ใน  $\textcircled{4}$



6. เนื่องจาก สมการกำลังสอง  $x^2 - 2ax + b = 0$

มีเพียง 1 คำตอบ ก็ต่อเมื่อ  $b = a^2$

นั่นคือ คู่อันดับ  $(a, b)$  ที่ตรงกับเงื่อนไขนี้คือ

$(1, 1)$  และ  $(2, 4)$

ฉะนั้น ระยะห่างระหว่างจุดสองจุดนี้

$$k = \sqrt{(2-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

ดังนั้น  $k^2 = 10$

7. ถ้าป้อนจำนวน  $x$  เข้าในโปรแกรม B จะได้

ผลลัพธ์เป็น  $x + 4$

เมื่อป้อนจำนวน  $x + 4$  เข้าในโปรแกรม A จะได้

ผลลัพธ์เป็น  $(x + 4 + 1)^2 = (x + 5)^2$

นั่นคือ  $(x + 5)^2 = 36$

$$x + 5 = \pm 6$$

$$x = -11 \text{ หรือ } x = 1$$

เนื่องจาก  $x$  เป็นจำนวนเต็มลบ ฉะนั้น  $x = -11$

ถ้าป้อนจำนวน  $-11$  เข้าในโปรแกรม A จะได้

ผลลัพธ์เป็น  $(-11 + 1)^2 = 100$

ถ้าป้อนจำนวน  $100$  เข้าในโปรแกรม B จะได้

ผลลัพธ์เป็น  $100 + 4 = 104$

ดังนั้น ถ้าให้โปรแกรมทำงานถูกต้องจาก A ไป B

จะได้ผลลัพธ์สุดท้ายเป็น  $104$

8. เนื่องจากอาสาสมัครทีม A ที่มีต้นเป็น 5 มีจำนวน

$$2 \text{ คน จะได้ว่า } (4 + 5 + b + 2) \times \frac{1}{7} = 2$$

$$11 + b = 14$$

$$b = 3$$

อายุเฉลี่ยของอาสาสมัครทีม A ที่มีอายุตั้งแต่

30 ปี แต่น้อยกว่า 40 ปี เท่ากับ

$$\frac{32 + 34 + 35 + 36 + 38}{5} = \frac{175}{5} = 35 \text{ ปี}$$

อายุเฉลี่ยของอาสาสมัครทีม B ที่มีอายุตั้งแต่

30 ปี แต่น้อยกว่า 40 ปี เท่ากับ

$$\frac{(30 + a) + 35 + 36 + 39}{4} = \frac{140 + a}{4} \text{ ปี}$$

$$\text{นั่นคือ } \frac{140 + a}{4} = 36$$

$$140 + a = 144$$

$$a = 4$$

$$\text{ดังนั้น } a + b = 4 + 3 = 7$$





9. เนื่องจาก  $\sqrt{a^2} = -a$  จะได้ว่า  $a < 0$   
 และจาก  $\sqrt{b^2} = b$  จะได้ว่า  $b > 0$
- ①  $y = ax^2 + bx$  เนื่องจาก  $a < 0$  และ  $b > 0$   
 จะได้กราฟพาราโบลาคว่ำ และจากเส้นตรง  
 $x = \frac{-b}{2a}$  เป็นแกนสมมาตร และ  $\frac{-b}{2a} > 0$   
 จะได้ว่าแกนสมมาตรอยู่ทางขวาของแกน Y
- ②  $y = (b-a)x^2 + b$  เนื่องจาก  $b-a > 0$  และ  
 $b > 0$  จะได้กราฟพาราโบลาหงาย  
 และจาก  $x = \frac{0}{2(b-a)} = 0$   
 จะได้ว่าแกนสมมาตรอยู่บนแกน Y
- ③  $y = bx^2 + ax$  เนื่องจาก  $b > 0$  และ  $a < 0$   
 จะได้กราฟพาราโบลาหงาย และจากเส้นตรง  
 $x = \frac{-a}{2b}$  เป็นแกนสมมาตร และ  $\frac{-a}{2b} > 0$   
 จะได้ว่าแกนสมมาตรอยู่ทางขวาของแกน Y
- ④  $y = abx^2 - ax$  เนื่องจาก  $ab < 0$  และ  
 $-a > 0$  จะได้กราฟพาราโบลาคว่ำ และ  
 จากเส้นตรง  $x = \frac{-(-a)}{2ab}$  เป็นแกนสมมาตร  
 และ  $\frac{-(-a)}{2ab} > 0$   
 จะได้ว่าแกนสมมาตรอยู่ทางขวาของแกน Y
- ⑤  $y = ax^2 + bx - ab$  เนื่องจาก  $a < 0$ ,  $b > 0$   
 และ  $-ab > 0$  จะได้กราฟพาราโบลาคว่ำ  
 และจากเส้นตรง  $x = \frac{-b}{2a}$  เป็นแกนสมมาตร  
 และ  $\frac{-b}{2a} > 0$   
 จะได้ว่าแกนสมมาตรอยู่ทางขวาของแกน Y
- ดังนั้น กราฟของสมการกำลังสองที่ไม่ถูกต้องคือ ④

10. (1) เมื่อแทน (1, 1) ลงในสมการ  
 จะได้  $1 = 1^2 - a + a$  เป็นจริง  
 ดังนั้น กราฟผ่านจุด (1, 1) เป็นคำอธิบาย  
 ที่ถูกต้อง
- (2) เนื่องจาก  $y = x^2 - ax + a$   

$$= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a$$
 กราฟเลื่อนตามแนวแกน X ไปทางซ้าย  
 $\frac{a}{2}$  หน่วย คือ  $y = \left(x + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a$   

$$= x^2 - \frac{a^2}{4} + a$$
 ดังนั้น แกนสมมาตรของกราฟที่ได้จากการ  
 เลื่อนขนานนี้คือ  $x = 0$  เป็นคำอธิบายที่ถูกต้อง
- (3) เนื่องจาก  $y = x^2 - ax + a$   

$$= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a$$
 ถ้าจุดยอดอยู่บนแกน X จะได้ว่า  

$$-\frac{a^2}{4} + a = 0$$

$$a(a-4) = 0$$

$$a = 0 \text{ และ } a = 4$$
 นั่นคือ ค่าของ  $a$  มี 2 ค่า  
 ดังนั้น ค่าของ  $a$  มี 1 ค่า เป็นคำอธิบายที่ไม่  
 ถูกต้อง
- เนื่องจากแต่เนี่ยลตอบถูก 2 ข้อ และตอบผิด 1 ข้อ  
 ดังนั้น แต่เนี่ยลจะได้  $10 + (-5) + 10 = 15$  คะแนน





11. เนื่องจาก  $[x, y] = \sqrt{3}x + \sqrt{(-y)^2}$  โดยที่  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

$$[2n, m] = 2\sqrt{3}n + \sqrt{(-m)^2}$$

$$= 2\sqrt{3}n - m \quad (\text{เพราะ } m < 0)$$

$$[2m, n] = 2\sqrt{3}m + \sqrt{(-n)^2}$$

$$= 2\sqrt{3}m + n \quad (\text{เพราะ } n > 0)$$

เนื่องจาก  $[2n, m] - 2 = -[2m, n]$

$$\text{จะได้ว่า } 2\sqrt{3}n - m - 2 = -(2\sqrt{3}m + n)$$

$$2\sqrt{3}n - m - 2 = -2\sqrt{3}m - n$$

$$2\sqrt{3}(n+m) + n - m - 2 = 0$$

$$\text{จะได้ว่า } 2\sqrt{3}(n+m) = 0 \text{ และ } n - m - 2 = 0$$

$$\text{ฉะนั้น } m + n = 0 \text{ และ } m - n = -2$$

ถ้าแก้ทั้งสองสมการรวมกัน จะได้

$$m = -1 \text{ และ } n = 1$$

$$\text{ดังนั้น } m^2 + n^2 = 2$$

12.  $a^n - 1 = 2 \times 5 \times 73 \times 728$

$$a^n = (2 \times 5 \times 73 \times 728) + 1$$

$$= (730 \times 728) + 1$$

$$= (729 + 1)(729 - 1) + 1$$

$$= 729^2 - 1^2 + 1$$

$$= 729^2$$

$$\text{จะได้ } a^n = 729^2 = (3^6)^2 = (3^4)^3 = (3^3)^4 = (3^2)^6 = 3^{12}$$

$$\text{เมื่อ } a = 3^6 = 729 \text{ จะได้ว่า } n = 2$$

$$\text{นั่นคือ } a \times n = 729 \times 2 = 1,458$$

$$\text{เมื่อ } a = 3^4 = 81 \text{ จะได้ว่า } n = 3$$

$$\text{นั่นคือ } a \times n = 81 \times 3 = 243$$

$$\text{เมื่อ } a = 3^3 = 27 \text{ จะได้ว่า } n = 4$$

$$\text{นั่นคือ } a \times n = 27 \times 4 = 108$$

$$\text{เมื่อ } a = 3^2 = 9 \text{ จะได้ว่า } n = 6$$

$$\text{นั่นคือ } a \times n = 9 \times 6 = 54$$

$$\text{เมื่อ } a = 3 \text{ จะได้ว่า } n = 12$$

$$\text{นั่นคือ } a \times n = 3 \times 12 = 36$$

$$\text{นั่นคือ } a \times n \text{ ที่น้อยที่สุด } a = 3 \text{ และ } n = 12$$

$$\text{ดังนั้น } a \times n = 3 \times 12 = 36$$

13. ถ้าให้หนึ่งช่องในแนวตั้งของทั้งสองฮิสโทแกรม แทน  $x$  คน

จากจำนวนสมาชิกทั้งหมดในองค์กร B จะได้ว่า

$$2x + 4x + 5x + 7x + 2x = 4,000$$

$$20x = 4,000$$

$$x = 200$$

ถ้าให้จำนวนสมาชิกในองค์กร A ที่อายุมากกว่า 40 ปี แต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 50 ปี มี  $\square$  คน

$$\text{จะได้ว่า } 3x + 5x + 8x + \square + x = 4,000$$

$$17x + \square = 4,000$$

$$3,400 + \square = 4,000$$

$$\square = 600$$

ดังนั้น สมาชิกในองค์กร A ที่อายุมากกว่า 40 ปี แต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 50 ปี มีจำนวน 600 คน







14. เนื่องจาก

$$\begin{aligned} a^3 &= (b+c)a^2 + (b^2+c^2)a - (b^2+c^2)(b+c) \\ a^3 - (b+c)a^2 - (b^2+c^2)a + (b^2+c^2)(b+c) &= 0 \\ a^2(a-b-c) - (b^2+c^2)(a-b-c) &= 0 \\ (a^2 - b^2 - c^2)(a-b-c) &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก กำหนด  $a, b$  และ  $c$  เป็นความยาวด้าน  
ของรูปสามเหลี่ยม จึงได้ว่า  $b+c > a$

นั่นคือ  $a-b-c \neq 0$

$$\text{ฉะนั้น } a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

$$\text{จะได้ } a^2 = b^2 + c^2$$

ดังนั้น เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาว  
ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น  $a$  หน่วย

15. เนื่องจาก  $a^2b + 2ab + 2a^2 + 4a + b + 2$

$$\begin{aligned} &= (a^2 + 2a + 1)b + 2a^2 + 4a + 2 \\ &= (a^2 + 2a + 1)b + 2(a^2 + 2a + 1) \\ &= (b+2)(a^2 + 2a + 1) \\ &= (b+2)(a+1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{และจาก } 1,573 = 13 \times 11^2$$

จะได้ว่า  $a+1 = 11$  นั่นคือ  $a = 10$

และ  $b+2 = 13$  นั่นคือ  $b = 11$

$$\text{จาก } \frac{a}{b} = \frac{10}{11} = 0.909090\dots$$

ดังนั้น เลขโดดหลังจุดทศนิยมตั้งแต่ตำแหน่งที่ 6  
ไปจนถึงตำแหน่งที่ 11 มีผลบวกเท่ากับ

$$0+9+0+9+0+9=27$$

16. ถ้าให้จำนวนรถโดยสารในตอนแรก  $x$  คัน

จะได้ว่า จำนวนนักเรียนในตอนแรกเป็น

$$25x - 2 \text{ คน}$$

เนื่องจากจำนวนนักเรียนที่ไปทัศนศึกษาได้ คือ

$$25x - 2 - 50 \leq 20(x - 1)$$

$$25x - 52 \leq 20x - 20$$

$$5x \leq 32$$

$$x \leq \frac{32}{5}$$

เนื่องจาก  $x$  เป็นจำนวนนับ

จะได้ว่า จำนวนรถโดยสารมากที่สุดจึงเป็น 6 คัน

นั่นคือ  $A = 6$  และ  $B = (25 \times 6) - 2 = 148$

$$\text{ดังนั้น } A + B = 6 + 148 = 154$$

17. เนื่องจาก  $AC = 2 \times AB$  และ  $CD = 3 \times AD$

จะได้ว่า  $AC = 4 \times AD$  ซึ่ง  $4 \times AD = 2 \times AB$

นั่นคือ  $AB = 2 \times AD$

พิจารณา  $\triangle ABC$  และ  $\triangle ADB$

จาก  $AB : AD = 2 : 1$

$$AC : AB = 2 : 1$$

และมี  $\hat{A}$  ร่วมกัน

ดังนั้น  $\triangle ABC \sim \triangle ADB$  (ด้าน มุม ด้าน)

นั่นคือ  $BC : DB = 2 : 1$

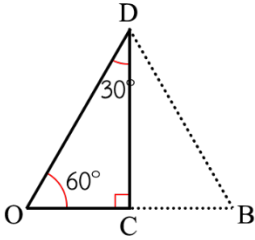
$$240 : DB = 2 : 1$$

ดังนั้น  $DB = 120$  เมตร





18. เนื่องจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีขนาดของมุมหนึ่งเป็น  $60^\circ$  เป็นรูปครึ่งหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แบ่งออกเป็นสองส่วนจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่าอัตราส่วนความยาวทั้งสามด้านเป็น  $2 : 1 : \sqrt{3}$



เนื่องจาก  $OB = OD = a$  หน่วย

$$\text{จะได้ว่า } OC = \frac{1}{2}a \text{ และ } DC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

เนื่องจาก  $OD = a$

$$\text{จะได้ว่า } OE = 2a \text{ และ } EB = \sqrt{3}a$$

จากพื้นที่ของส่วนที่แรเงาเป็น  $6\sqrt{3}$  ตารางหน่วย

$$\text{จะได้ว่า } \triangle EOB - \triangle DOC = 6\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1}{2} \times a \times \sqrt{3}a\right) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = 6\sqrt{3}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2 = 6\sqrt{3}$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4$$

ดังนั้น ความยาวส่วนของเส้นตรง DC เท่ากับ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3} \text{ หน่วย}$$

$$19. \text{ จาก } x^2 + y^2 + 2xy - 198x - 198y - 199 = 0$$

$$(x + y)^2 - 198(x + y) - 199 = 0$$

$$(x + y + 1)(x + y - 199) = 0$$

จะได้ว่า  $x + y = -1$  หรือ  $x + y = 199$

เนื่องจาก  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนนับ

$$\text{จะได้ว่า } x + y = 199$$

นั่นคือ คู่อันดับ  $(x, y)$  ที่สอดคล้องกับ

$x + y = 199$  มี 198 คู่ ได้แก่  $(1, 198), (2, 197), (3, 196), (4, 195), \dots, (198, 1)$

$$\text{จาก } x^2 + 4y^2 + 4xy - 198x - 396y - 400 = 0$$

$$(x + 2y)^2 - 198(x + 2y) - 400 = 0$$

$$(x + 2y + 2)(x + 2y - 200) = 0$$

จะได้ว่า  $x + 2y = -2$  หรือ  $x + 2y = 200$

เนื่องจาก  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนนับ

$$\text{จะได้ว่า } x + 2y = 200$$

นั่นคือ คู่อันดับ  $(x, y)$  ที่สอดคล้องกับ

$x + 2y = 200$  มี 99 คู่ ได้แก่  $(198, 1), (196, 2), (194, 3), (192, 4), \dots, (2, 99)$

จะพบว่า มีคู่อันดับที่เป็นคำตอบซ้ำ 1 คู่ คือ  $(198, 1)$

ดังนั้น คู่อันดับ  $(x, y)$  ที่สอดคล้องกับสมการของ

เอลซ่าหรือสมการของอันนา มีทั้งหมด

$$198 + 99 - 1 = 296 \text{ คู่อันดับ}$$





20. ถ้าแทนพิกัด  $x$  ของจุด B เป็น  $a$  โดยที่  $a > 0$

จะได้ว่า จุด A คือ  $(a, 3a)$

เนื่องจากรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม

จัตุรัส และ  $AB = 3a$  หน่วย

จะได้ว่า  $AD = 3a$  หน่วย เช่นกัน

นั่นคือ พิกัด  $x$  ของจุด D คือ  $a + 3a = 4a$

จะได้ว่า จุด D คือ  $(4a, 3a)$

รูปเรขาคณิตสามมิติที่เกิดจากการหมุนรูปสี่เหลี่ยม

จัตุรัส ABCD หนึ่งรอบ โดยมีแกน Y เป็น

แกนหมุน จะได้เป็นทรงกระบอกกึ่งกลางตรงกลาง

เนื่องจากปริมาตรของทรงกระบอกกึ่งกลางตรงกลาง

นี้เท่ากับ  $360\pi$  ลูกบาศก์หน่วย จะได้ว่า

$$\{\pi \times (4a)^2 \times 3a\} - \{\pi \times a^2 \times 3a\} = 360\pi$$

$$48a^3\pi - 3a^3\pi = 360\pi$$

$$45a^3\pi = 360\pi$$

$$a^3 = 8$$

$$a = 2$$

นั่นคือ จุด D คือ  $(8, 6)$  และจุดนี้อยู่บนเส้นตรง

$$x + y = k$$

$$\text{ดังนั้น } k = 8 + 6 = 14$$

21. เนื่องจาก  $4 < a < 5$

จะได้ว่า  $[[a]] = 4$  และ  $((a)) = 5$

$$y = [[\sqrt{a((a))}]]x^2 - ((\sqrt[3]{10a[[a]]}))x$$

$$+ [[a]]((a))$$

$$= [[\sqrt{5a}]]x^2 - ((\sqrt[3]{40a}))x + 20$$

เนื่องจาก  $20 < 5a < 25$

จะได้ว่า  $4 < \sqrt{5a} < 5$

เนื่องจาก  $160 < 40a < 200$

จะได้ว่า  $5 < \sqrt[3]{40a} < 6$

นั่นคือ  $y = [[\sqrt{5a}]]x^2 - ((\sqrt[3]{40a}))x + 20$

$$= 4x^2 - 6x + 20$$

$$= 4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{4}$$

เนื่องจาก  $-1 \leq x \leq 4$  จะได้ว่า ค่าสูงสุดของ

สมการกำลังสอง  $y = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{4}$  คือ

กรณีที่  $x = 4$

$$\text{ดังนั้น } (4 \times 4^2) - (6 \times 4) + 20 = 60$$

22. ถ้าให้ปริมาณน้ำที่ไหลออกจากประตูระบายน้ำ

1 ประตู เป็น  $x$  ตันต่อนาที

เนื่องจาก ประตูระบายน้ำ 3 ประตู ปล่อยน้ำ

ทั้งหมดออกมาในระยะเวลา 20 นาที

จะได้ว่า  $3 \times x \times 20 = 3,000 + (150 \times 20)$

$$60x = 6,000$$

$$x = 100$$

นั่นคือ ประตูระบายน้ำ 1 ประตู ระบายน้ำได้

100 ตันต่อนาที

ถ้าให้เปิดประตูระบายน้ำ  $y$  ประตู ระบายน้ำที่

อยู่ในเขื่อน 5,000 ตัน กับน้ำที่ไหลเข้ามาในเขื่อน

ด้วยอัตรา 400 ตันต่อนาที ในระยะเวลา 40 นาที

จะได้ว่า  $y \times 100 \times 40 \geq 5,000 + (400 \times 40)$

$$4,000y \geq 21,000$$

$$y \geq \frac{21}{4}$$

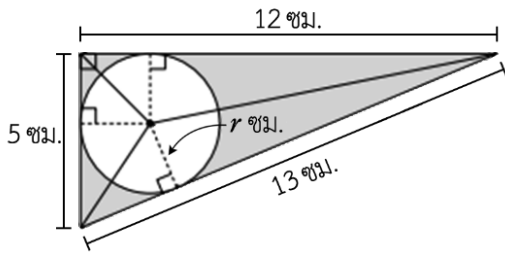
ดังนั้น ต้องเปิดประตูระบายน้ำอย่างน้อยที่สุด

6 ประตู





23. ถ้าให้ความยาวของรัศมีของวงกลมที่เป็นหน้าตัดของทรงกระบอกที่ตัดออกเป็น  $r$  เซนติเมตร หน้าฐานของปริซึมสามเหลี่ยมหลังตัดทรงกระบอกออกแล้วจะเป็นดังนี้



เนื่องจาก พื้นที่ฐานหนึ่งหน้าก่อนตัดทรงกระบอกออกเท่ากับ  $\frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$  ตารางเซนติเมตร ถ้าหาค่าของ  $r$  โดยใช้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเดียวกัน จะได้เป็น  $\frac{1}{2} \times (5 + 12 + 13) \times r = 30$

$$15 \times r = 30$$

$$r = 2$$

จะได้ว่า พื้นที่ผิวของรูปเรขาคณิตสามมิติหลังตัดออกแล้วเท่ากับ

$$[30 - (\pi \times 2^2)] \times 2 + \{(5 + 12 + 13) \times 10\} + \{(2 \times \pi \times 2) \times 10\}$$

$$= 60 - 8\pi + 300 + 40\pi$$

$$= 360 + 32\pi$$

นั่นคือ  $a = 360$  และ  $b = 32$   
 ดังนั้น  $a + b = 360 + 32 = 392$

24. เนื่องจาก 8,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , 14 เป็นการเรียงจำนวนจากน้อยไปมาก จะได้ว่ามัธยฐานคือ  $c$  และจากฐานนิยมคือ 14 จะได้ว่า  $e = 14$  เนื่องจากค่าเฉลี่ยของข้อมูลชุดนี้คือ 12 จะได้ว่า  $\frac{8 + a + b + c + d + 14 + 14}{7} = 12$  นั่นคือ  $a + b + c + d = 48$

(i) กรณี  $c = 14$  แสดงว่า  $d = 14$  จะได้ว่า  $a + b = 20$  และจาก  $8 \leq a \leq b \leq 14$  แสดงว่า คู่อันดับ ( $a$ ,  $b$ ) ที่  $a + b = 20$  คือ (8, 12), (9, 11), (10, 10)

(ii) เมื่อ  $c = 13$  แสดงว่า  $d = 14$  จะได้ว่า  $a + b = 21$  และจาก  $8 \leq a \leq b \leq 13$  จะได้ว่า คู่อันดับ ( $a$ ,  $b$ ) ที่  $a + b = 21$  คือ (8, 13), (9, 12), (10, 11)

(iii) เมื่อ  $c = 12$

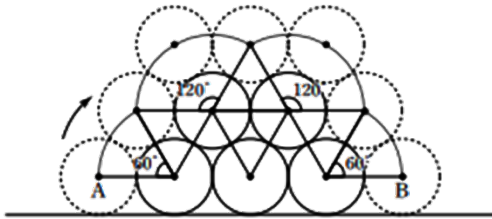
- ถ้า  $d = 13$  จะได้ว่า  $a + b = 23$  เนื่องจาก  $8 \leq a \leq b \leq 12$  จะได้ว่า คู่อันดับ ( $a$ ,  $b$ ) ที่  $a + b = 23$  คือ (11, 12) แต่เนื่องจากฐานนิยมเป็น 14 ดังนั้น  $d \neq 13$
- ถ้า  $d = 14$  จะได้ว่า  $a + b = 22$  เนื่องจาก  $8 \leq a \leq b \leq 12$  จะได้ว่า คู่อันดับ ( $a$ ,  $b$ ) ที่  $a + b = 22$  คือ (10, 12), (11, 11)

(iv) เมื่อ  $c = 11$  ถ้า  $d = 12$ ,  $d = 13$ ,  $d = 14$  จะได้ว่า ไม่มีคู่อันดับ ( $a$ ,  $b$ ) ที่ตรงเงื่อนไข ฉะนั้น จาก (i)-(iv) จำนวนที่สามารถเป็นมัธยฐานได้คือ 14, 13, 12  
 ดังนั้น ผลบวกของจำนวนเต็มทั้งหมดที่สามารถเป็นมัธยฐานได้เท่ากับ  $14 + 13 + 12 = 39$





25. เมื่อแสดงรูปการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางของวงกลมจากตำแหน่ง A ไปยังตำแหน่ง B จะได้นี้



ระยะทางที่จุดศูนย์กลางของวงกลมเคลื่อนที่ไปจากตำแหน่ง A ไปยังตำแหน่ง B เท่ากับ

$$\left\{ (2\pi \times 2r \times \frac{60}{360}) + (2\pi \times 2r \times \frac{120}{360}) \right\} \times 2$$

$$= 4\pi r \text{ หน่วย}$$

นั่นคือ เมื่อเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบ ระยะทางที่จุดศูนย์กลางของวงกลมเคลื่อนที่ไปเท่ากับ

$$4\pi r \times 2 = 8\pi r \text{ หน่วย}$$

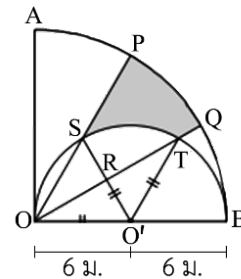
$$\text{เนื่องจาก } 8\pi r = 16\sqrt{2} \pi$$

$$\text{จะได้ว่า } r = 2\sqrt{2}$$

$$\text{ดังนั้น } r^2 = 8$$

26. สร้างครึ่งวงกลม โดยให้จุดกึ่งกลางของ  $\overline{OB}$  คือ  $O'$  ลาก  $\overline{SO'}$  และ  $\overline{TO'}$  ให้จุด R เป็นจุดตัดของ  $\overline{SO'}$  กับ  $\overline{OQ}$

$$\text{จะได้ว่า } \hat{AOP} = \hat{POQ} = \hat{QOB} = 30^\circ$$



เนื่องจาก  $\hat{SOO'} = 60^\circ$  จะได้ว่า  $\triangle SOO'$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า และ  $SO = 6$  เมตร

เนื่องจาก  $\triangle OO'T$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$\text{จะได้ว่า } \hat{OO'T} = 120^\circ \text{ และ } \hat{SO'T} = 60^\circ$$

พิจารณา  $\triangle SOR$  กับ  $\triangle O'TR$

เนื่องจาก  $SO = O'T$

$$\text{และ } \hat{RSO} = \hat{RO'T}, \hat{SOR} = \hat{O'TR}$$

จึงได้ว่า  $\triangle SOR \equiv \triangle O'TR$  (มุม ด้าน มุม)

นั่นคือ ส่วนที่แรเงามีพื้นที่เท่ากับ พื้นที่ของ

เซกเตอร์  $POQ$  ลบด้วย พื้นที่ของเซกเตอร์  $SO'T$

ดังนั้น พื้นที่ของส่วนที่แรเงาเท่ากับ

$$\left( 3 \times 12^2 \times \frac{30}{360} \right) - \left( 3 \times 6^2 \times \frac{60}{360} \right)$$

$$= 36 - 18$$

$$= 18 \text{ ตารางเมตร}$$



27. ถ้าให้รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในตอนแรกมีด้านกว้าง  $12x$  เซนติเมตร ด้านยาว  $12y$  เซนติเมตร และ สูง  $12z$  เซนติเมตร

พิจารณา รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็กหนึ่งส่วน ของ A มีด้านยาว  $6x$  เซนติเมตร ด้านกว้าง  $6y$  เซนติเมตร และสูง  $4z$  เซนติเมตร

จากพื้นที่ผิวของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็ก หนึ่งส่วน ของ A เท่ากับ 2,016 ตารางเซนติเมตร จะได้ว่า  $2 \times (36xy + 24yz + 24zx) = 2,016$

$$36xy + 24yz + 24zx = 1,008$$

$$3xy + 2yz + 2zx = 84 \text{ ---(1)}$$

พิจารณา รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็กหนึ่งส่วน ของ B มีด้านยาว  $6x$  เซนติเมตร ด้านกว้าง  $4y$  เซนติเมตร และสูง  $6z$  เซนติเมตร

จากพื้นที่ผิวของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็ก หนึ่งส่วน ของ B เท่ากับ 2,160 ตารางเซนติเมตร จะได้ว่า  $2 \times (24xy + 24yz + 36zx) = 2,160$

$$24xy + 24yz + 36zx = 1,080$$

$$2xy + 2yz + 3zx = 90 \text{ ---(2)}$$

พิจารณา รูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็กหนึ่งส่วน ของ C มีด้านยาว  $4x$  เซนติเมตร ด้านกว้าง  $6y$  เซนติเมตร และสูง  $6z$  เซนติเมตร

จากพื้นที่ผิวของรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็ก หนึ่งส่วน ของ C เท่ากับ 1,872 ตารางเซนติเมตร จะได้ว่า  $2 \times (24xy + 36yz + 24zx) = 1,872$

$$24xy + 36yz + 24zx = 936$$

$$2xy + 3yz + 2zx = 78 \text{ ---(3)}$$

ถ้าบวกสมการ (1), (2) และ (3) จะได้ว่า

$$7xy + 7yz + 7zx = 252$$

$$xy + yz + zx = 36$$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากหนึ่งอัน ก่อนตัดแบ่ง

$$2 \times (144xy + 144yz + 144zx)$$

$$= 288 \times (xy + yz + zx)$$

$$= 288 \times 36$$

$$= 10,368 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

28. เนื่องจาก  $AD : DB = 3 : 4$  จะได้ว่า  $DB = \frac{4}{7} AB$

จาก  $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$  จะได้ว่า

$$AE : EC = AD : DB = 3 : 4$$

จาก  $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$  จะได้ว่า

$$BF : FC = AE : EC = 3 : 4$$

จาก  $\overline{CA} \parallel \overline{FG}$  จะได้ว่า

$$BG : GA = BF : FC = 3 : 4$$

นั่นคือ  $BG = \frac{3}{7} AB$

และ  $DG = DB - BG = \frac{4}{7} AB - \frac{3}{7} AB = \frac{1}{7} AB$

เนื่องจาก  $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$

และจาก  $BF : FC = AE : EC = 3 : 4$

จะได้ว่า  $CF : CB = 4 : 7$

เนื่องจาก  $EF : AB = 4 : 7$  จะได้  $EF = \frac{4}{7} AB$

ซึ่งแสดงว่า  $EF = 4 \times DG$

นั่นคือ  $EF + DG = 225$

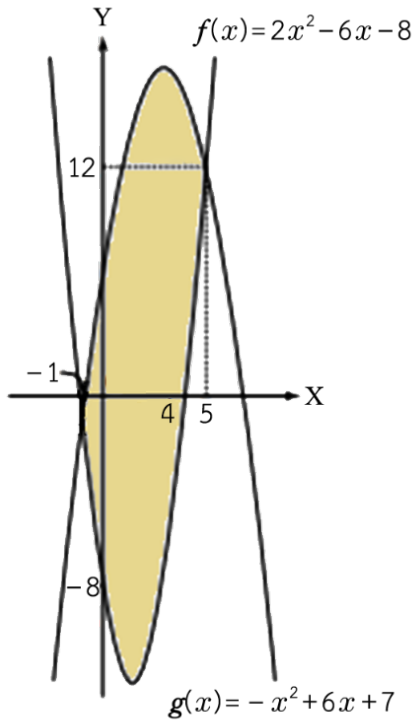
$$(4 \times DG) + DG = 225$$

$$5 \times DG = 225 \text{ กิโลเมตร}$$

ดังนั้น  $DG = 45$  กิโลเมตร



29. กำหนดให้  $f(x) = 2x^2 - 6x - 8$   
 และ  $g(x) = -x^2 + 6x + 7$   
 เมื่อแสดงกราฟของสมการ  $y = 2x^2 - 6x - 8$   
 และ  $y = -x^2 + 6x + 7$  ดังรูป



เนื่องจาก  $2x^2 - 6x - 8 = -x^2 + 6x + 7$   
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$   
 $x^2 - 4x - 5 = 0$   
 $(x + 1)(x - 5) = 0$   
 $x = -1$  และ  $x = 5$

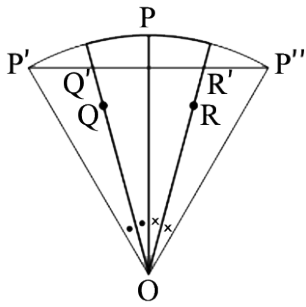
นั่นคือ พิกัดของ  $x$  ที่เป็นจำนวนเต็ม ภายใน  
 บริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟของ  $y = f(x)$   
 และ  $y = g(x)$  คือ  $x = 0, 1, 2, 3, 4$

- (i) กรณี  $x = 0$   
 จะได้ว่า  $f(0) = -8$  และ  $g(0) = 7$   
 นั่นคือ  $-8 < y < 7$   
 ฉะนั้น เมื่อพิกัด  $x$  เป็น 0 จะมีพิกัด  $y$  ที่เป็น  
 จำนวนเต็มทั้งหมด  $7 - (-8) - 1 = 14$  จำนวน
- (ii) กรณี  $x = 1$   
 จะได้ว่า  $f(1) = -12$  และ  $g(1) = 12$   
 นั่นคือ  $-12 < y < 12$   
 ฉะนั้น เมื่อพิกัด  $x$  เป็น 1 จะมีพิกัด  $y$  ที่เป็น  
 จำนวนเต็มทั้งหมด  $12 - (-12) - 1 = 23$  จำนวน
- (iii) กรณี  $x = 2$   
 จะได้ว่า  $f(2) = -12$  และ  $g(2) = 15$   
 นั่นคือ  $-12 < y < 15$   
 ฉะนั้น เมื่อพิกัด  $x$  เป็น 2 จะมีพิกัด  $y$  ที่เป็น  
 จำนวนเต็มทั้งหมด  $15 - (-12) - 1 = 26$  จำนวน
- (iv) กรณี  $x = 3$   
 จะได้ว่า  $f(3) = -8$  และ  $g(3) = 16$   
 นั่นคือ  $-8 < y < 16$   
 ฉะนั้น เมื่อพิกัด  $x$  เป็น 3 จะมีพิกัด  $y$  ที่เป็น  
 จำนวนเต็มทั้งหมด  $16 - (-8) - 1 = 23$  จำนวน
- (v) กรณี  $x = 4$   
 จะได้ว่า  $f(4) = 0$  และ  $g(4) = 15$   
 นั่นคือ  $0 < y < 15$   
 ฉะนั้น เมื่อพิกัด  $x$  เป็น 4 จะมีพิกัด  $y$  ที่เป็น  
 จำนวนเต็มทั้งหมด  $15 - 0 - 1 = 14$  จำนวน
- ดังนั้น จำนวนคู่อันดับ  $(x, y)$  มีทั้งหมด  
 $14 + 23 + 26 + 23 + 14 = 100$  คู่อันดับ





30.



ถ้ากำหนดจุด  $P'$  กับ  $P''$  ที่ทำให้  $\widehat{POQ} = \widehat{P'OQ}$

และ  $\widehat{POR} = \widehat{P''OR}$

จะได้ว่า  $PQ + QR + RP = P'Q + QR + RP'' \geq P'P''$

เนื่องจากความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม

น้อยที่สุดเท่ากับความยาวของ  $P'P''$

จาก  $\widehat{P'OP''} = 2 \times 30 = 60^\circ$

จะได้ว่า  $\triangle P'OP''$  เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

นั่นคือ  $P'P'' = 10$  หน่วย

ดังนั้น ความยาวรอบรูปที่น้อยที่สุดของรูป

สามเหลี่ยม  $PQR$  เท่ากับ 10 หน่วย

